$\boxed{\text{B1}}$ Giải phương trình:

$x^2+\sqrt{x+5}=5$

<u>Giải:</u> Ta có:

$x^2+\sqrt{x+5}=5$

$\Leftrightarrow x^2=5-\sqrt{x+5}$

$\Leftrightarrow x^2+x+\dfrac{1}{4}=x+5-2.\dfrac{1}{2}\sqrt{x+5}+\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x+\dfrac{1}{2})^2=(\sqrt{x+5}-\dfrac{1}{2})^2$

......

$\boxed{\text{B2}}$ Giải phương trình:

a) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

b) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

<u>Giải:</u>

a)

$36-x^2-x-2.6.\sqrt{x+1}=0$

$x+1-2.6.\sqrt{x+1}+36-(x^2+2x+1)=0$

$(\sqrt{x+1}-6)^2-(x+1)^2=0$

$(\sqrt{x+1}-6-x-1)(\sqrt{x+1}-6+x+1)=0$

......

b)

$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

$\Rightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(4-x^2)2}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow 8x+16+32-16x+16\sqrt{8-2x^2}-9x^2-16=0$

$\Leftrightarrow 16\sqrt{8-2x^2} - 8x + 32 - 9x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4(8-2x^2) + 16\sqrt{8-2x^2} + 16 - 8x - 9x^2 + 8x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{8-2x^2} + 4)^2 - x^2 - 8x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{8-2x^2} + 4)^2 - (x+4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ ....

$\boxed{\text{B3}}$ Giải phương trình:

$x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$

<u>Giải</u>

Đặt $\sqrt{4-x^2} = a \qquad (a \geq 0)$

$\Rightarrow 4 - x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 - a^2$

và $x + a = 2 + 3xa \Rightarrow x = \dfrac{2-a}{1-3a} \Rightarrow x^2 = \dfrac{(2-a)^2}{(1-3a)^2}$

$\Rightarrow 4 - a^2 = \dfrac{4-4a+a^2}{1-6a+9a^2}$

$\Rightarrow (1-6a+9a^2)(4-a^2) = 4 - 4a + a^2$

$\Leftrightarrow 4 - a^2 - 24a + 6a^3 + 36a^2 - 9a^4 = 4 - 4a + a^2$

$\Leftrightarrow 9a^4 - 6a^3 - 34a^2 + 20a = 0$

$\Leftrightarrow a(9a^3 - 6a^2 - 34a + 20) = 0$

$\Leftrightarrow a(a-2)(9a^2 + 12a - 10) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0; a = 2; 9a^2 + 12a - 10 = 0 \quad (1)$

$\Delta' = 6^2 + 10.9 = 129 \Rightarrow a = \dfrac{-6+\sqrt{129}}{9} \quad (a \geq 0)$

$\boxed{\text{B4}}$ Giải phương trình:

$x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$

<u>Giải:</u>

$x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31 \Leftrightarrow (x^2+11) + \sqrt{x^2+11} - 42 = 0 \Rightarrow x^2 + 11 = 36 \Rightarrow x = \pm 5$

$\boxed{\text{B5}}$ Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Ta có: $\sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \Leftrightarrow (x-y)^2 = (x-y)^3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y+1 \end{array}\right.$$

TH1: $x = y$

$x + y = \sqrt{x+y+2}$

$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 2x + 2 \Rightarrow x = y = 1$

TH2: $x = y + 1$

$x + y = \sqrt{x+y+2}$

$\Leftrightarrow 2y + 1 = \sqrt{2y+3}$

$\Leftrightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 2y + 3$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}; x = \dfrac{3}{2}$

B6

$$\frac{1}{4x-2006} + \frac{1}{5x+2004} = \frac{1}{15x-2007} - \frac{1}{6x-2005}$$

<u>Giải:</u>

$$\frac{1}{4x-2006} + \frac{1}{5x+2004} = \frac{1}{15x-2007} - \frac{1}{6x-2005}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-2}{(4x-2006)(5x+2004)} = \frac{-(9x-2)}{(15x-2007)(6x-2005)}$$

B7

$$\begin{cases} 3(x+\frac{1}{x}) = 4(y+\frac{1}{y}) = 5(z+\frac{1}{z}) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

Giải:

Viết lại phương trình đầu như sau: với x,y,z khác 0 :
$\dfrac{x}{3(x^2+1)} = \dfrac{y}{4(y^2+1)} = \dfrac{z}{5(z^2+1)}(1)$
(1) $\Rightarrow$ nếu (x_0, y_0, z_0) là nghiệm ở đây $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$ thì $-x_0, -y_0, -z_0$ cũng là nghiệm (1) dẫn tới (1) có nghiệm cùng dấu
$x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$
Lại có do: (2) $\quad \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2} = 1$
nên A,B,C là 3 góc của 1 tam giác
lại có: $\sin A = \dfrac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

Nên: (1) $\quad \Leftrightarrow \dfrac{\sin A}{3} = \dfrac{\sin B}{4} = \dfrac{\sin C}{5}$
$\Rightarrow$ các cặp cạnh đối diện cũng tỉ lệ : a,b,c là các cạnh đối diện với góc A,B,C
$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5}$
Nên tam giác này là tam giác vuông tại C $\Rightarrow C = 90$

dẫn tới $z = \tan 45^o = 1$

Thế vào PT(1) được $x = \dfrac{1}{3}, y = \dfrac{1}{2}$

Nên HPT có 1 nghiệm là $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1)$

theo lý luận trên đầu bài dẫn tới hệ cũng có nghiệm $(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, -1)$

KL :HPT có 2 nghiệm $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1), (-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, -1)$

B8 :

$$\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6$$

Giải:

ĐK : $x < 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{6}{3-x}} - 2 + \sqrt{\frac{8}{2-x}} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{6}{3-x} - 4}{\sqrt{\frac{6}{3-x}} + 2} + \frac{\frac{8}{2-x} - 16}{\sqrt{\frac{8}{2-x}} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2(2x-3)}{3-x}}{\sqrt{\frac{6}{3-x}} + 2} + \frac{\frac{8(2x-3)}{2-x} - 16}{\sqrt{\frac{8}{2-x}} + 4} = 0$$

$\Leftrightarrow (2x-3)(...) = 0$

mà (...) khác 0 nên ta được $x = \frac{3}{2}$

B9

$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Giải:

ĐK : $x \geq -2$

$\Leftrightarrow 2[x^2 - 2x + 4 - (x+2)] = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$

Đặt a = $\sqrt{x+2}$; $b = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ $(a, b \geq 0$

Ta được 2(b$^2 - a^2) = 3ab$

$\Leftrightarrow (a + 2b)(2a - b) = 0$

B10

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$

Giải:

ĐK: ... Đặt $t = VT$ (ĐK: $t \geq$ ...) PT trên tương đương với $t = t^2 - 20$

$(t-5)(t+4) = 0$

B11

$\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$ Giải:

ĐK :...

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-1} = 1 - \sqrt{4x-1}$

2 vế không âm bình phương lên thu được

$4x - 2\sqrt{4x^2-1} = 4x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2-1} = -(2x-1)^2$

PT đánh giá: $VT \geq 0$;VP ≤ 0

Ta được nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$

B12

$\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải:

ĐK là các biểu thức trong dấu căn không âm

Đặt $a = \sqrt{x^2+2x}$, $b = \sqrt{2x-1}(a, b \geq 0)$

PT trở thành

$a + b = \sqrt{3a^2 - b^2}$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 3a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2ab - 2b^2$

$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}b$

B13

$x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2-x} + \sqrt{1+3x-3x^2}$

Giải:

Theo AM-GM

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - x} \le \frac{2x^2-x+1}{2} \\ \sqrt{1+3x-3x^2} \le \frac{1+3x-3x^2+1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 \le \dfrac{-x^2+2x+3}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 + x^2 - 2x - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 1$

B14

$\sqrt{x+3}.x^4 = 2x^4 - 2008x + 2008$

Giải:

$tx^4 = 2x^4 - 2008(x-1) = 2x^4 - 2008(t^2 - 4)$

$\Leftrightarrow -2008t^2 - tx^4 + (2x^4 + 2008.4) = 0$

$\Delta = x^8 - 4(-2008)(2x^4 + 2008.4) = x^8 + 2.4.2008x^4 + (4.2008)^2 = (x^4 + 4.2008)^2$

$x_1 = \dfrac{x^4 - (x^4 + 4.2008)}{-2.2008} = 2$

hay $\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 4 - 3 = 1$

$x_2 = \dfrac{x^4 + x^4 + 4.2008}{-2.2008} = \sqrt{x+3}$

B15

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = a \\ \sqrt{x+y} = b \end{cases}$$

Hệ $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{B16}}$

$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Đặt: $\begin{cases} x^2 - xy = a \\ x^3y = b \end{cases}$

Hệ tương đương:

$$\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x, y) = ...$

$\boxed{\text{B17}}$

$$x^4 + \sqrt{x^2 + 2010} = 2010$$

<u>Giải:</u>

Đặt $x^2 = a$, $\sqrt{x^2 + 2010} = t$

Ta có: $\begin{cases} a^2 + t = 2010 \\ t^2 - a = 2010 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (a + t)(a - t + 1) = 0$

$\boxed{\text{B18}}$

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy $y = 0$ không phải nghiệm.

Hệ trên tương đương với:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ \\ (x + \dfrac{1}{y})^2 - \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases}$$

Từ đây dễ dàng giải tiếp.

B19

$x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36 \quad (1)$

Giải:

ĐK: $x \geq -1$

$(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 - (x+1) + 12\sqrt{x+1} = 36$

Đặt: $t = \sqrt{x+1} \ \ (t \geq 0)$

$t^4 - t^2 + 12t - 36 = 0$

$t^4 = (t-6)^2$

B20

$\sqrt{x+1} + x + 2 = \sqrt{2x^2 + 6x + 6} \quad (1)$

Œt : $\begin{cases} \sqrt{x+1} = a \ \ (a \geq 0) \\ x+2 = b \ \ (b \geq 1) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow a + b = \sqrt{2b^2 - 2a^2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2b^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 2ab - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3a - b)(a + b) = 0$

Do $a, b > 0$ nên $3\sqrt{x+1} = x + 2$

$\Leftrightarrow 9x + 9 = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 5 = 0$

B21

Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x(3x+2y)(x+1) = 12 \\ x^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$

b) $\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y - 6 = 0 \end{cases} \quad (2)$

Giải:

a)

(1)$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)(x^2+x) = 12 \\ x^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} a = 3x + 2y \\ b = x^2 + x \end{cases}$

Như vậy thì:

$\begin{cases} ab = 12 \\ a + b = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=2\\ b=6\end{array}\right.\\ \\ \left[\begin{array}{l}a=6\\ b=2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

......

$b)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+2x)(2x+y)=12\\ x^2+4x+y-6=0\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}a=x^2+2x\\ b=2x+y\end{cases}$

Như vậy thì:

$$\begin{cases}ab=9\\ a+b=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x-3=0\\ 2x+y=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ \\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=9\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Nghiệm: $(x;y)=(1;1);(3;-9)$

B22 $\sqrt{\dfrac{42}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{60}{7-x}}=6$

Giải:

ĐK: $x<5$

Nếu $x\in(-\infty;\dfrac{1}{3})$ thì $VT>6$

Nếu $x\in(\dfrac{1}{3};5)$ thì $VT<6$

Nếu $x=\dfrac{1}{3}$ thì $VT=6$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$

B23

$x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=\sqrt{x^2+5x+7}+\sqrt{x^2-2x-8}$

Đặt $\sqrt{x^2+5x+7}=a$; $\sqrt{x^2-2x-8}=b$ $(a,b\geq 0)$ Ta có: $\dfrac{a^2+b^2}{2}+1=a+b$

$a^2+b^2+2-2a-2b=0$

$(a-1)^2+(b-1)^2=0$

Đến đây ta xét đấu bằng xảy ra, thay vào tìm x

Kết quả: vô nghiệm

B24

$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải:

Bình phương 2 vế:

$8x+16+32-16+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow x^2+8x+16=8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16$

$\Leftrightarrow (x+4)^2=(2\sqrt{2(4-x^2)}+4)^2$

.....

$\Leftrightarrow x=2\sqrt{2(4-x^2)}$

......

B25

$$\left[\begin{array}{l}(x+y)(x^2-y^2)=45\\(x-y)(x^2+y^2)=85\end{array}\right.$$

Giải:

Ta thấy: $x \neq \pm y$

Từ đây ta có:

$17(x-y)(x+y)^2 = 9(x-y)(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 17xy + 4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (4x+y)(4y+x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$

B26

$$\begin{cases} 4 - x^2 + (x-y)^2 = 5 \\ 2x(y-x) + x + y = 5 \end{cases}$$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} a = 2x \\ b = y - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab + a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ Hệ đối xứng

B27

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x^3 + 3y^3 = x + 3y \end{cases}$$

Giải:

Vì $x^2+y^2-xy=1$ nên:

$x^3+3y^3=(x+3y)(x^2+y^2-xy)$

$x^3+3y^3=x^3+xy^2-x^2y+3x^2y+3y^3-3xy^2$

$2x^3+2x^2y-2xy^2=0$

$xy(x-y)=0$

B28

Tìm ngiệm nguyên dương của hệ:

$$\begin{cases} 2^x=2y \\ 2^y=2x \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Với $x>y \Leftrightarrow 2^x>2^y \Leftrightarrow 2y=2^x>2^y=2x \Leftrightarrow y>x$ (vô lý)

Với $x<y \Leftrightarrow 2^x<2^y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x>y$ (vô lý)

Vậy $x=y$

Thay vào:

$2^x=2x$

Thử với các số 1,2,3,4,...

Ta được nghiệm: $(x;y)=(1;1);(2;2)$

B29

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ z^2+yz+1=0 \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Từ phương trình thứ nhất ta có x là ẩn, y là tham số:

$\Delta=y^2-4y^2+12=-3y^2+12\geq 0 \Leftrightarrow y^2\leq 4$

Từ phương trình thứ hai coi z là ẩn, y là tham số:

$\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 4$

Suy ra $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

Với $y = 2$ thì $x = 1$ và $z = -1$

Với $y = -2$ thì $x = -1$ và $z = 1$

B30

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy $y = 0$ không phải nghiệm của hệ

Ta chia 2 vế của phương trinh thứ nhất cho y, chia 2 về của phương trình thứ hai cho y^2, ta được:

$$\begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{1}{y}) + \frac{x}{y} = 7 \\ (x + \frac{1}{y})^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$$

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases}$$

Cộng vế theo về, giải ra a và b sau đó thay vào

B31

Tìm nghiệm nguyên dương: $3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5$

Giải:

Cách 1: Biến đổi phương trình:

$x + \frac{z}{yz+1} = 1 + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 1\ ;\ \frac{z}{yz+1} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3-2y}$

$x = 1\ ;\ y = 1\ ;\ z = 2$ *Cách 2*:

Từ đề bài ta được:

$(3x-5)(yz+1) + 3z = 0$

Nếu $x \geq 2$ thì $3x - 5 \geq 1$, khi đó $(3x-5)(yz+1) + 3z > 0$

Do đó $x = 1$

Sau đó thay vào...

B32

Giải hệ:

a) $\begin{cases} xy + y + 2x + 2 = 4 \\ yz + 2z + 3y = 2 \\ xz + z + 3x = 5 \end{cases} \quad (1)$

b) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 5 \end{cases} \quad (2)$

Giải

a)

$(1) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x+1)(y+2) = 4 \\ (z+3)(y+2) = 8 \\ (x+1)(z+3) = 8 \end{cases}$ Lấy pt 1 chia pt 2 rồi nhân pt 3 ta được $(x+1)^2 = 4$

Từ đây ta thay vào giải ra

b)

Đặt $a = x + y$; $b = xy$ $(a, b \geq 0\ ; a^2 \geq 4b)$

Ta có:
$$\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 16 \\ a + 10 + 2\sqrt{5a + b + 25} = 36 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow \sqrt{5a + b + 25} - \sqrt{b} = 5$

$\Leftrightarrow$

$5a + b + 25 = 25 + 10\sqrt{b} + b$

$a = 2\sqrt{b}$

$a^2 = 4b$

$\Leftrightarrow x = y$ (nghiệm kép của phương trình bậc 2)

Do đó:
$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x + 5} = 3 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow x = y = 4$

B33
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Giải:

$x + y + z = 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 2xy - z^2$

$(x + z)^2 + (y + z)^2 = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \Leftrightarrow y = 2 \\ y + z = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$
$x = y = 2$; $z = -2$

B34

a) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x - x^2} = x + 1$

b) $(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8) = 32xyz \ \ (z, y, x \geq 0)$

c)
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10$

Giải:

a)

Áp dụng BĐT Cauchy:
$\sqrt{x^2+x} \leq \dfrac{x+x+1}{2}$
$\sqrt{x-x^2} \leq \dfrac{x+1-x}{2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-x^2} \leq \dfrac{x+x+1+x+1-x}{2} = x+1$ Vì phương trình là trường hợp xảy ra dấu bằng nên:

$x = x+1$

$x = 1-x$

Do đó phương trình vô nghiệm

b) Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$x^2+1 \geq 2x$

$y^2+2 \geq 2\sqrt{2}y$

$z^2+8 \geq 4\sqrt{2}z$

$\Rightarrow (x^2+1)(y^2+2)(z^2+8) \geq 32xyz$ Phương trình chính là trường hợp dấu bằng xảy ra nên:

$x = 1$

$y = \sqrt{2}$

$z = 2\sqrt{2}$

c) Ta có:
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$

Đặt: $a = \sqrt[3]{y-1}$ $(a \neq 0)$

$$\frac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = \frac{4a^4+4}{a^2} \geq 8$$

$\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4(y-1)\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} \geq 10$ Phương trình xảy ra:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \sqrt[3]{y-1} \Leftrightarrow y = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x;y) = (1;2)$

B35

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy: $x = y = z = 1$ là 1 nghiệm của hệ

Nếu x> 1 $\Rightarrow 2 = z^5 - z^4 + 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2$

$\Rightarrow (z-1)(z^4+2z+2) < 0 \Rightarrow z < 1 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow x < 1$ (vô lí)

Đối với trường hợp $x < 1$ thì tương tự

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x = y = z = 1$

B36

a) $x^2 - \sqrt{x+5} = 5$

b) $\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20$

c) $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$

d) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$

e) $\sqrt{x+5} = x^2 - 4x + 3$

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x$

g) $\dfrac{x}{x+1} - 2\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = 3$

<u>Giải:</u>

a) ĐK: $x \geq -5$

Đặt : $\sqrt{x+5} = t \ (t \geq 0)$

$\Leftrightarrow t^2 = x + 5 \Leftrightarrow t^2 - x = 5$

Đưa về hệ:

$$\begin{cases} t^2 - x = 5 \\ x^2 - t = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x-t)(x+1+1) = 0$

b) Biến đổi:

$\sqrt{2x+15} - 4 = 8(2x-1)(2x+3)$

$\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x+15+4}} = 8(2x-1)(2x+3)$

Đã xuất hiện nhân tử chung

c) Đặt 3 cái căn bậc 3 lần lượt là a,b,c thì suy ra:

$(a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3$

d) Đặt: $\sqrt[4]{97-x} = a$; $\sqrt[4]{x-15} = b$; $\Rightarrow \{a + b = 4a^4 + b^4 = 82$

e) ĐK: $x \geq -5$

Phương trình ban đầu:

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} - 2 = x^2 - 4x - 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5+2}} = (x+1)(x-5)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 1 = [(x+5) - 10](\sqrt{x+5} + 2) \ \ (*) \end{array}\right.$$

Để xử lí (*), ta đặt $\sqrt{x+5} = y \ \ (y \geq 0)$. Khi đó:

$(2) \Leftrightarrow (y^2 - 10)(y+2) = 1$

$y^3 + 2y^2 - 10y - 21 = 0$

$(y+3)(y^2 - y - 7) = 0$

$y=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=(1-x)\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(x-1)\sqrt{3x-2}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2+\sqrt{3x-2})=0$

g) $\dfrac{x}{x+1}-2\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=3$

ĐK: $x>0$

Đặt: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=t$

$\Rightarrow (\dfrac{1}{t})^2-2t=3$

$t=0,5$; $t=-1$ (loại)

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{-4}{3}$ (loại)

B37

a) $3x^2+2x=2\sqrt{x^2+x}+1-x$

b) $\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$

Giải:

a) ĐK: $x\le -1$ hoặc $x\ge 0$

$3x^2+2x=2\sqrt{x^2+x}+1-x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1)^2+2(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1)(3\sqrt{x^2+x}+1)=0$

b) Đặt: $\begin{cases}\sqrt{1+x}=a\ \ (a\ge 0)\\ \sqrt{1-x}=b\ \ (b\ge 0)\end{cases}$

Suy ra:

$$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a+a^2+2=b+3ab \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2a^2+b^2+a-b-3ab=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-b)+a(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-b+1+a)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a-b+1)=0$ Đến đây thử từng trường hợp, rút a theo b (b theo a) rồi thay vào tính

B38

$$\begin{cases} x^2-6x-2y-15=0 \\ x^2y-3xy+2z+6=0 \qquad (x,y,z\in Z) \\ x^2y^2+2y+12-4z\le 0 \end{cases}$$

Giải:

Ta có:

$(x^2-3x-2y-15)+2(x^2y-3xy+2z+6)+(x^2y^2+2y+12-4z)\le 0$

$\Rightarrow (xy+x)^2-6(xy+x)+9\le 0$

$(xy+x-3)^2\le 0$

$xy+x-3=0\Leftrightarrow x(y+1)=3\ \ (x,y\in Z)$

B39

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y=-3 \\ x^2-xy+y^2+x-2y=12 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y=-3\ \ (1) \\ (x-y)^2+x^2+y^2+2x-4y=24\ \ (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1):

$(x-y)^2+6(x-y)=27$

$$\left[\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-y=9 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{B40}}$

$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

Giải:

$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1})^3=(\sqrt[3]{5x})^3$

$\Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{(x^2-1).5x}=5x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^2-1).5x}=x$

$\Leftrightarrow 5x^3-5x=x^3$

$\Leftrightarrow x(4x^2-5)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{B41}}$

Phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^6+3x^3+1=y^2$

b) $1+x^2+x^3+x^4=y^4$

c) $1+x+x^2=y^2$

Giải:

Sử dụng phương pháp kẹp để giải:

a) Nếu $x\geq 1$ thì

$(x^3+1)^2<y^2=x^6+3x^3+1<(x^3+2)^2 \Leftrightarrow$ vô nghiệm

Nếu $x\leq -2$ thì:

$(x^3+2)^2<y=x^6+3x^3+1<(x^3+1)^2$ (vô nghiệm)

Vậy, ta thử $x=0$ hoặc $x=-1$, suy ra $x=0$ là nghiệm b)

Nếu $x \geq 1$ thì:

$x^4 < y^4 < (x+1)^4$ (vô lí)

Nếu $x \leq 1$ thì:

$x^4 > y^4 > (x+1)^4$ (vô lí)

Do đó $x = 0$

c)

Tương tự câu a)

$\boxed{\text{B42}}$

$\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = x^2 + 2$

<u>Giải:</u>

Khi đó ta có:

$x^2 + 2 \geq 2$

$\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \leq 2\sqrt{\dfrac{1+2x+1-2x}{2}} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = x^2 + 2 \Leftrightarrow x = 0$

$\boxed{\text{B43}}$

$(2x^2+2)^2 = 4y^2 - 3$

<u>Giải:</u>

$(2x^2+2)^2 + 3 = 4y^2$

Ta thấy: $(2x^2+2)^2 \vdots 4$

$4y^2 \vdots 4$

Mà $3 \not\vdots 4$ nên phương trình vô nghiệm

$\boxed{\text{B44}}$

$$\begin{cases} x^3y^2 = -8 \\ x^9 + y^6 = 56 \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Đặt:

$x^3 = a$ và $y^2 = b$ $(y \geq 0)$

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} ab = -8 \\ a^3 + b^3 = 56 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Tới đây ta thay vào và giải ra.

B45

$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-5} = 2x^2 - 5x \quad (1)$

ĐK: $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$

$(1) \quad \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 + \sqrt{2x-5} - 1 = 2x^2 - 5x - 3$

$\Leftrightarrow \frac{x-2-1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1} + \frac{2x-5-1}{\sqrt{2x-5}+1} = (x-3)(2x+1)$

$\Leftrightarrow (x-3)(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}+1} - 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

B46

$\sqrt{13x^2 + 17x + 7} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{x^2 - x + 19} = 3\sqrt{3}(x+2)$

Giải:

$VT = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{75}{4}} + \sqrt{(2x-1)^2 + 3(x+2)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(2x-1)^2 + \frac{3}{4}(4x+3)^2}$

$\geq \frac{\sqrt{75}}{2} + \sqrt{3}|x+2| + \frac{\sqrt{3}}{2}|4x+3| \geq 3\sqrt{3}(x+2) = VP$

Như vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$

B47

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \quad (1) \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \quad (2) \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Giải:

Từ hệ ta có: $x, y, z \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} > \dfrac{3}{2}$

Không mất tính tổng quát giả sử: $x \geq y$ (do vai trò bình đẳng)

Trừ phương trình (1) và (2) theo vế:

$y^3 - z^3 = 9(x-y)(x+y) - 27(x-y) = 9(x-y)(x+y-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow y \geq z$ Tương tự: Từ (2) và (3) ta được:

$z \geq x \leftrightarrow y \geq x$

Mà theo giả thiết thì $x \geq y$ nên $x = y$

Như vậy ta được $x = y = z$

Thế vào ta được: $x = y = z = 3$

B48

Tìm k để phương trình sau có nghiệm:

$(x^2+2)[x^2 02x(2k-1) + 5k^2 - 6k + 3] = 2x + 1$

Giải:

Phương trình tương đương:

$(x^2+2)[x^2 - 2x(2k-1) + (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 - 2k + 1) + 1] = 2x + 1$

$\Leftrightarrow (x^2+2)(x^2 - 2k + 1) + (x^2+2)(k-1)^2 + (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = k = 1$

B49

$\sqrt{x^2-4x+5} - \sqrt{x^2-2x+4} = \sqrt{x^2+4x+7} - \sqrt{x^2+2x+8}$

Giải:

$\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2+2x+8} = \sqrt{x^2+4x+7} + \sqrt{x^2-2x+4}$

$sqrtx^2 + 4x + 7 - (2x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 4 - (2x-1)} = \sqrt{x^2+4x+7} + \sqrt{x^2-2x+4}$

Đến đây ta xét:

$x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình

$x > \dfrac{1}{2}$ thì $2x - 1 > 0$ dẫn đến $VT > VP$ (vô nghiệm)

$x < \dfrac{1}{2}$ thì $2x - 1 < 0$ dẫn đến $VT < VP$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{1}{2}$

B50

a) Tìm tất cả các số nguyên không âm x,y sao cho:

$(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$

b) Cho phương trình

$m\sqrt{x^6+1} = 3(x^4+2)$

c) Giải phương trình:

$x^4 + (x-1)(x^2-2x+2) = 0$

Giải:

a)

$(y+1)^4 + y^4 = (x+1)^2 + x^2$

$(y^2+y+1)^2 = x^2+x+1$

Vì $x \geq 0$ nên $x^2 < x^2+x+1 \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

b)

Áp dụng AM-GM ta có:

$6\sqrt{x^6+1} \leq 3(x^4+2)$

Dấu bằng xảy ra: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^4-x^2+1}$

$\left[x = 0x\sqrt{2}\right.$ Phương trình có đúng 2 nghiệm khi $m = 6$

c)

$x^4 + (x-1)(x^2-2x+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-2)(x^-x+1) = 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình tích

B51

a) $\begin{cases} 1 - \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ y^2 + 1 = 5(x^2+1) \end{cases}$

Giải:

a) (1)+(2) $\Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow (1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}})^2 = \dfrac{9}{y} \Leftrightarrow y \dfrac{9x}{(\sqrt{x}-1)^2}$

Thay vào (1) sẽ giải ra.

b) (1)+(2):

$(3x^3 - y^3)(x+y) = (x^2+y^2)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+3x^2+3xy^2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 2y + 3x^2y + 3xy^2 = 0 \end{cases}$

c)

$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ y^2 + 1 = 5(x^2+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4) \\ y^2 - 5 = 5x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 16) = 5x^2y \\ y^2 - 4 = 5x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 16 = 5xy \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2-16}{5x} \end{array} \right.$

Ta thay vào phương trình (2), ra phương trình trùng phương

B52

Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x + |y-2| = 2 \\ 2x - y = m \end{cases}$$

Giải:

Chia làm 2 trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối:

Với $y \geq 2$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow 3y = 8 - m$$

Vì $y \geq 2$ nên hệ vô nghiệm khi $8 - m < 6 \Leftrightarrow m > 2$ Với $y < 2$ ta có:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow y = m$$

Hệ vô nghiệm khi: $m \geq 2$ Như vậy $\forall m \geq 2$ hệ đều vô nghiệm

B53

Cho $x, y, z > 0$. Tìm x,y,z, biết:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{xyz} \\ x + y + z = 2\sqrt{xyz} \end{cases}$$

Giải:

Ta có:

$\sum x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$

$4\sqrt{xyz} \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$

Nhân 2 vế của 2 đẳng thức trên:

$4(x+y+z)\sqrt{xyz} \geq 9xyz > 8xyz$

$x + y + z > 2\sqrt{xyz}$

Dẫn đến hệ này vô nghiệm

B54

$$\begin{cases} 36x^2 + 9y^4 + 4z^6 = 1 \\ x + y^2 + z^3 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Áp dụng BĐT Bunyakovsky:

$(36x^2 + 9y^4 + 4z^6 = 1)(\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}) \geq (x + y^2 + z^3)^2 = \frac{4}{9}$

$\frac{7}{18} \geq \frac{4}{9}$

Hệ vô nghiệm.

B55

$Giiphngtrnh:$

$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+4} = 12 - \sqrt{3x-7}$

<u>Giải:</u>

Cách 1: Khi ta biết nghiệm là x=6 (đoán nghiệm hoặc dùng máy tính, đối với thi HSG thi không dùng cách này được)

Sử dụng phương pháp kẹp khi $x = 6$

$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+4} + \sqrt{3x-7} = 12$

Với $x > 6$ thì $VT > \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} > 12$

Với $x < 6$ thì $VT < \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} < 12$

Với $x = 6$ thì $VT = \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} = 12$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 6$

Cách 2: Giải theo cách chính quy

$\sqrt{x+3} - 3 + \sqrt{2x+4} - 4 + \sqrt{3x-7} - 5 = 0$

$\leftrightarrow \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}+3} + \dfrac{2x-12}{\sqrt{2x+4}+4} + \dfrac{3x-18}{\sqrt{3x+7}+5} = 0$

$\leftrightarrow (x-6)(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3} + \dfrac{2}{\sqrt{2x+4}+4} + \dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+5}) = 0$

$x = 6$

B56

$\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3-1$

<u>Giải:</u>

Những bài như thế này dùng định lý kẹp rất tốt:

Với $x<0$ thì:

$VT<1<VP$

Với $x>0$ thì:

$VT>1>VP$

Với $x=0$ thì $VT=VP$

Nghiệm của phương trình: $x=0$

B57

Cho a,b,c là các số thỏa mãn:

$$\begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ 19a+6b+9c=12 \end{cases}$$

Chứng minh rằng có ít nhất 1 trong 2 phương trính sau có nghiệm:

$(*):\ x^2-2(a+1)x+a^2+6abc+1=0$

$(**):\ x^2-2(b+1)x+b^2+19abc+1=0$

<u>Giải:</u>

Phương pháp biến đổi tương đương:

Ta có:

Dùng Δ:

$$\left[\begin{array}{l} 2a-6abc\geq 0 \\ 2b-19abc\geq 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Mặt khác:

$19a+6b+9c=12$

$-6abc=19a^2c+9ac^2-12ac$

Và $-19abc = 6b^2c + 9bc^2 - 12bc$

Do đó:
$$\left[\begin{array}{l} 2a - 6abc \geq 0 \ (1) \\ 2a - 19abc \geq 0 \ (2) \end{array}\right.$$
Như vậy:
$$\left[\begin{array}{l} 2a + 19ac + 9ac^2 - 12c \geq 0 \\ 2a + 6bc + 9ac^2 - 12c \geq 0 \end{array}\right.$$
Nếu tổng của 2 biểu thức này lớn hơn hoặc bằng 0 thì có ít nhất một trng hai bất đẳng thức trên là đúng. Ta có:

$2 + 19ac + 9c^2 - 12c + 2 + 6bc + 9c^2 - 12c \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 + c(19a + 6v) + 18c^2 - 24c \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 + c(12 - 9c) + 18c^2 - 24c \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 + 9c^2 - 12c \geq 0$

$\Leftrightarrow (3c - 2)^2 \geq 0 \ \ (**)$

Vì (**) đúng nên (*) đúng, dẫn đến điều phải chứng minh.

B58

Cho phương trình: $x^2 - (m-4)x - m + 3 = 0$

TÌm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$x_1^5 + x_2^5 = 31$

Giải:

$\Delta = m^2 - 8m + 16 + 4(m-3) = (m-2)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Ta có:

$x^2 - (m-4)X - m + 3 = 0$

$(x+1)(x-m+3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = m - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (m-2)^5 = 32 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn $x \neq 2$)

B59

Giải phương trình sau:

$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 0$ (*)

Giải:

ĐK: $x \geq 3$ $(*)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3}} = \dfrac{3}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 3(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 2x + 4 + 2\sqrt{(x+6)(x-2)} = 4(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+6)(x-2) = x^2$

$\Leftrightarrow x = 3$

B60

$2x^2 + 8x + 6 = \sqrt{\dfrac{x+4}{2}}$

Giải:

Đặt: $y + 2 = 2(x+2)^2 - 2$

Khi đó:

$y + 2 = \sqrt{\frac{x+4}{2}}$

$\begin{cases} 2(y+2)^2 = x + 4 \\ 2(x+2)^2 = y + 4 \end{cases}$

Hệ đối xứng loại 2

B60

Cho hệ:
$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$
Tính: $Q = x^2 + y^2$

<u>Giải:</u>

Dùng phương pháp đánh giá:

Từ phương trình (1), tính Δ ta có: $x^3 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -1$

Từ phương trình (1), tính Δ ta có: $x \geq -1$

Như vậy, $x = -1$ Thay vào ta tính được:

$y = 1$

Do đó: $Q = 2$

B61

a) $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2 - \dfrac{x^2}{4}$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

<u>Giải:</u>

a)

Đặt: $\begin{cases} \sqrt{1+x} = a \ \ (a \geq 0) \\ \sqrt{1-x} = b \ \ (b \geq 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{7}{4} + \dfrac{a^2b^2}{4} \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$

Hệ đối xứng loại 1

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

$\Leftrightarrow 2x + 11 + 2\sqrt{(x+1)(x+10)} = 2x + 7 + 2\sqrt{(x+2)(x+5)}$

$\Leftrightarrow 4 + x^2 + 11x + 10 + 4\sqrt{(x+1)(x+10)} = x^2 + 7x + 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10}) = 0$

$\leftrightarrow x = -1$

B62

Giải phương trình sau:

$3^{3x} = 2^{6x} - 3.2^{3x} - 13 \quad (x > 0)$

<u>Giải:</u>

$3^{3x} = 2^{6x} - 3.2^{3x} - 13$
$\Leftrightarrow (\frac{27}{64})^x + 3.(\frac{8}{64})^x + 13(\frac{1}{64})^x = 1$
Ta thấy:

Với $x = 1$, VT=VP nên $x = 1$ là 1 nghiệm

Với $x > 1$, ta có:
$(\frac{27}{64})^x < \frac{27}{64}$

$3(\frac{8}{64})^x < 3.\frac{8}{64}$

$13(\frac{1}{64})^x < 13.\frac{1}{64}$

$(\frac{27}{64})^x + 3.(\frac{8}{64})^x + 13(\frac{1}{64})^x < \frac{27}{64} + \frac{27}{64} + 13.\frac{1}{64}$

Với $x < 1$, ta có:
$(\frac{27}{64})^x > \frac{27}{64}$

$3(\frac{8}{64})^x > 3.\frac{8}{64}$

$13(\frac{1}{64})^x > 13.\frac{1}{64}$

$(\frac{27}{64})^x + 3.(\frac{8}{64})^x + 13(\frac{1}{64})^x > \frac{27}{64} + \frac{27}{64} + 13.\frac{1}{64}$

Như vậy, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1$

B63

a)
$$\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2x}{x^2+2x+1}=\frac{18}{15}$$
b)
$$\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1$$
c)

$x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$

d)

$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$

e)

$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$

f)
$$\sqrt{x}+\sqrt{3x}+\sqrt{4x}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$
g)

$x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$

h)
$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}}=\sqrt{3x+1}-1$$
i)

$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$

j)

$\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

Giải:

a) DK: $x \neq -1$

Xét $x = 0$ không phải nghiệm. Ta có phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{2x} + 1 + \frac{1}{2x} = \frac{18}{15}$$

Đặt: $t = x + \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t} + \frac{1}{\frac{1}{2}t+1} = \frac{18}{15}$$

Đến đây có thể giải quyết dễ dàng

b) ĐK: $x \neq -1$; $x \neq -\dfrac{2}{3}$

Xét $x = 0$ không phải nghiệm

Phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3x-1+\frac{2}{x}} - \frac{7}{3x+5+\frac{2}{x}} = 1$$

Đặt: $t = 3x + \dfrac{2}{x}$

Dễ dàng giải được phương trình này

c) Tách ra:

ĐK: $x \neq -5$

Phương trình ban đầu:

$$\Leftrightarrow (x - \frac{5x}{x+5})^2 + 2.\frac{5x^2}{x+5} = 1$$

$$(\frac{x^2}{x+5})^2 + 2\frac{5x^2}{x+5} = 1$$

Đặt: $\dfrac{x^2}{x+5} = t$

Khi đó: $t^2 + 10t = 1$

Đến đây thì coi như xong

d) Phương trình trở thành:

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6) = 72$$

$$\Leftrightarrow (36x^2 + 84x + 49)(36x^2 + 84x + 48) = 72$$

$$\left[\begin{array}{l} 36x^2 + 84x + 48 = 8 \\ 36x^2 + 84x + 48 = -9 \end{array}\right.$$

Coi như xong

e) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$

$4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60) = 3x^2$

$\Leftrightarrow 4a(a-x) = 3x^2 \quad$ (với $a = x^2 + 17x + 60$)

$\Leftrightarrow (2a-x)^2 - 4x^2 = 0$

Dễ dàng giải ra

f)

$$\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+1)}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3(\sqrt{3}+1)^2 \Leftrightarrow x = 9(\sqrt{3}+1)^4$$

g)

$\Leftrightarrow x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4 + 3 - 2x - 2\sqrt{3-2x} + 1 = 0$

$\leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3-2x} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = 1$

h) Nhân với biểu thức liên hợp:

$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 0 \\ \sqrt{3x+10} = \sqrt{3x+1} + 1 \Leftrightarrow x = 5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

i) Đặt ẩn phụ:

$$\left\{\begin{array}{ll} a = \sqrt{x+5} & (a \geq 0) \\ b = \sqrt{x+2} & (b \geq 0) \end{array}\right.$$

Khi đo ta có:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ (a-b)(1+ab) = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (a-b)(-a-b+1+ab) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-1)(b-1) = 0$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

j) Đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = a \quad (a \geq 0) \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = b \quad (b \geq 0) \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 9x - 3 \\ a - 2b = 9x - 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (a-2b)(a+2b-1) = 0$

Dễ dàng tìm ra x.

$\boxed{\text{B64}}$

$x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$

<u>Giải:</u>

Đặt: $t = \sqrt{x^2+7}$

$t^2 - (x+4)t + 4x = 0$

$\Delta = (x-4)^2$

$t_1 = x$ (loại)

$t_2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm 3$

$\boxed{\text{B65}}$

Cho 3 số $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$

Tính: $A = \dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2}$

<u>Giải:</u>

Ta có: Vì: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$

Nên: $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz}$

Suy ra: $A = xyz(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3}) = xyz.\dfrac{3}{xyz} = 3$

B66

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0 \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0 \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0 \end{cases}$$

<u>Giải:</u>

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0 \ \ (1) \\ 2x - 10y - 2z - 4z^2 = 0 \ \ (2) \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) - (3) \Leftrightarrow 4z^2 - 2yz - 2xz = 0$

$z = 0$

$x + y = 2z$

Thế vào hệ ban đầu sẽ ra

B67

$(2x - 1)^2 = 12\sqrt{x^2 - x + 2} + 1$

<u>Giải:</u>

ĐK: $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

Với điều kiện trên, phương trình ban đầu tương đương:

$4x^2 - 4x + 1 - 12\sqrt{x^2 - x - 2} = 1$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 2) - 2.3.2\sqrt{x^2 - x - 2} + 9 = 1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x - 2} - 3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} \sqrt{x^2 - x - 2} = 4 \\ \sqrt{x^2 - x - 2} = 2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 - x - 18 = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{matrix}$

Cả 2 phương trình trên đều có nghiệm, giải ra và đối chiếu nghiệm

$\boxed{\text{B68}}$

$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 = 7y \\ y^3 + 6x^2y = 7 \end{cases}$

Giải:

Từ hệ ta suy ra $x, y > 0$

Đặt $x = ay \quad (a > 0)$

Ta có:

$4a^3y^3 + 3ay^3 = 7y \quad (1)$

$y^3 + 6a^2y^3 = 7 \quad (2)$

Từ (1) ta được:

$y^2 = \dfrac{7}{4a^3 + 3a}$

Từ (2) ta được:

$y^3 = \dfrac{7}{1 + 6a^2}$

$Rrightarrow(\dfrac{7}{4a^3 + 3a})^3 = (\dfrac{7}{1 + 6a^2})^2$

Giải phương trình trên được $a = 1$

Do đó $x = y = 1$ (thỏa mãn)

$\boxed{\text{B69}}$

$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}=x^3+30$

Giải:

ĐK: $2 \leq x \leq 4$

Để ý ta sẽ thấy $6x\sqrt{3x}=2.\sqrt{x^2.27}$

Ta sẽ đưa về phương trình đánh giá

Ta có:

$(\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x})^4 \leq 8(x-2+4-x)=16$

$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x} \leq 2$

$\sqrt{(x-2)(4-x)} \leq 1$

$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi $x=3$

Dùng BĐT AM-GM

$6x\sqrt{3x} \leq x^3+27$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức vừa chứng minh:

$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x} \leq x^3+30$

Như vậy phương trình có nghiệm khi $x=3$

$x=3$ là nghiệm duy nhất

B70

$$\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$$

ĐK: $x, y \in R$

Đặt: $\sqrt[3]{x^2-2x+9}=a$; $\sqrt[3]{y^2-2y+9}=b$

$\Leftrightarrow a^3-b^3=x^2-y^2-2x+2y$

Trừ vế theo vế các phương trình của hệ ta được:

$2xy(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})=x^2-y^2-2x+2y$

$2xy\dfrac{b-a}{ab} = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(a-b)(a^2+b^2+ab+\dfrac{2xy}{ab}) = 0$

Đến đây dễ dàng giải ra $x=y=1$ hoặc $x=y=0$

B71

a) $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$

b) $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}} = x$

c) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = x$

Giải:

a)

ĐK: $x \geq -1$

Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = a \quad (a \geq 0) \\ \sqrt{x^2-x+1} = b \ \ (b \geq 0) \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$2a^2-5ab+2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2b-a)(b-2a) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4(x^2-x+1) \\ x^2-x+1 = 4x+4 \end{cases}$

b) ĐK: $x > 0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}} = \sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}$

$\Leftrightarrow x^2+x-\dfrac{7}{x^2}-2x\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}} = x^2-\dfrac{7}{x^2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}} = 1$

c)

ĐK: $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Phương trình ban đầu:

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}})^2 = (\sqrt{x - \dfrac{1}{x}})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - \dfrac{1}{x} - 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = x - \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x(x-1) - 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x(x-1)} - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

B72

$\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

Giải:

$\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} \leq \sqrt{2(2x-3+5-2x)} = 2$

$3x^2 - 12x + 14 \geq 2$

Dấu bằng xảy ra: $x = 2$

Nghiệm: $x = 2$

B73

$\begin{cases} x + \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = 3 \quad (1) \\ y + \dfrac{3x-y}{x^2+y^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$

Nhân 2 vế của phương trình (1) với x, của phương trình (2) với y. Trừ vế theo vế các phương trình với nhau. Ta được:

$x^2 - y^2 + 1 = 3x \quad (3)$

Nhân 2 vế của phương trình (1) với y, của phương trình (2) với x. Trừ vế theo vế các phương trình với nhau. Ta được:

$2xy + 3 = 3y \Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{2x-3} \quad (4)$

Thế (4) vào (3) ta được:

$4x^4 - 24x^3 + 49x^2 - 39x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ;\ x = 3$

Nghiệm: $(x; y) = (0; 1); (3; -1)$

B74

Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình sau có nghiệm:

$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Giải:

Đặt:

$t = x + \dfrac{a+b}{2}$

$d = \dfrac{b-a}{2}$

$u = t^2$

Khi đó:

$(t - d)^4 + (t + d)^4 = c$

$t^4 + 8t^2d^2 + d^4 - c = 0$

$u^2 + 8d^2u + d^4 - c\ \ (*)$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi phương trình (*) có nghiệm không âm

$d^4 - c \le 0$

B75

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x^3 + 3y^3 = x + 3y \end{cases}$$

Giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1\ \ (1) \\ x(x-1) - 3y(y-1) = 0\ \ (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra: $x^2 - 1 = xy - y^2\ ;\ 1 - y^2 = x^2 - xy$, thay vào (1) ta được:

$x(xy - y^2) - 3y(x^2 - xy) = 0$

$\Leftrightarrow -2xy(x - y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Nghiệm:

$(x; y) = (0; 0); (0; \pm 1); (\pm 1; 0)$

B76

Hệ phương trình nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288 \end{cases}$$

Giải:

$10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz$

$\Leftrightarrow (3x - 2y)^2 + (y - 3z)^2 + (x - 2z)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ y = 3z \\ x = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{27} = \frac{z^3}{1} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{8 + 27 + 1} = 8$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

B77

a) $4x^2 + 4y - 4xy + 5y^2 + 1 = 0$

b) $x^4 = 24x + 32 = 0$

c) $4\sqrt[4]{2 - x^4} \geq -x^4 + 5$

Giải:

a) $4x^2 + 4y - 4xy + 5y^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2y + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x; y) = (-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2})$

b) $x^4 = 24x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 2x + 6 \\ x^2 + 2 + 2x + 6 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$

c) $4\sqrt[4]{2 - x^4} \geq -x^4 + 5$

$\Rightarrow 4(-x^2 + 3x + \sqrt[4]{2 - x^4} - 3) \leq -x^4 - 4x^2 + 12x - 7 \Leftrightarrow 0 \leq -(x^2 - 1)^2 - 6(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow x = 1$

$\boxed{\text{B78}}$

a) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 4$

b) $(x^2 + 1)(y^2 + 2)(z^2 + 8) = 32xyz$

c) $\dfrac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}$

<u>Giải:</u>

a) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = a$; $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = b$

Ta có hệ: $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$

b) Dùng AM-GM:

$(x^2 + 1)(y^2 + 2)(z^2 + 8) \geq 2|x|.2\sqrt{2}|y|.4\sqrt{2}|z| = 32|xyz| \geq 32xyz$

c) Đặt: $\sqrt[3]{2x - 1} = t \Rightarrow t^3 = 2x + 1$

$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ y^2 + 1 = 2x \end{cases}$

$\boxed{\text{B79}}$

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{2}{3}x+y+\dfrac{85}{36}=0 \ \ (1) \\ x^2y-2xy-6x+y+2=0 \ \ (2) \end{cases}$$

Giải:

Xét phương trình (1)

$\Delta=(\dfrac{2}{3})^2-4(y+\dfrac{85}{36})=-4y+9\geq 0$

$\Leftrightarrow y\geq -\dfrac{9}{4}$

Xét phương trình (2)

$\Delta'=y+3^2-y(y+2)=4y+9\geq 0$

$\Leftrightarrow y\geq -\frac{9}{4}$

Như vậy, $y=-\dfrac{9}{4}$

Thay vào tính x.

$\boxed{\text{B80}}$

$\sqrt[3]{x^3+12x+7}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2-3x-2}+x+1$

Giải:

$\sqrt[3]{x^3+12x+7}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2-3x-2}+x+1$

$$\frac{-3(x^2-3x-2)}{\sqrt[3]{x^3+12x+7}+(x+1)\sqrt[3]{x^3+12x+7}+(x+1)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{x^2-3x-2}$$

$\Leftrightarrow x^2-3x-2=0$

$\boxed{\text{B81}}$

$x^2+4x=\sqrt{x+6}$

Giải:

ĐK: $x\geq -6$

$x^2+4x=\sqrt{x+6}$

$\Leftrightarrow x^4+8x^3+16x^2-x-6=0$

$(x^2+3x-2)(x^2+5x+3)=0$

Giải và đối chiếu điều kiện

—HẾT—